

О вычислительных подходах к оценке вероятности дифференциалов в низкоресурсных XSPL-преобразованиях

В.А. Кирюхин

ООО «СФБ Лаб», ОАО «ИнфоТеКС»

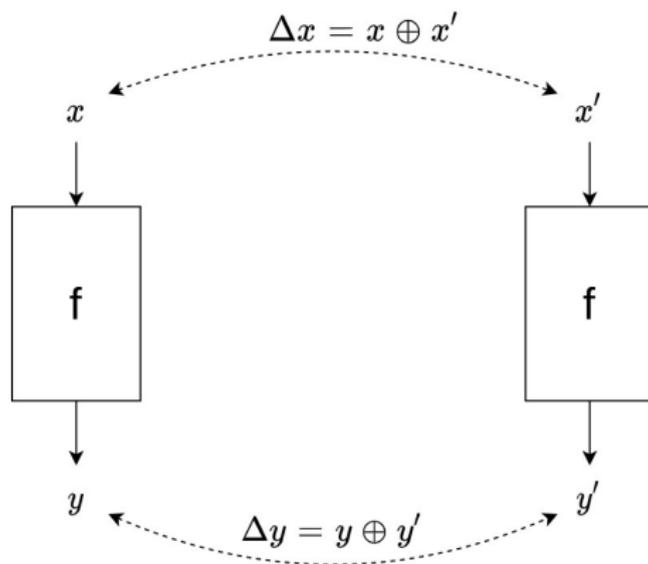
РусКрипто'2021

25 марта 2021

`vitaly.kiryukhin@sfblaboratory.ru`

Дифференциальный криптоанализ

- Один из наиболее известных и универсальных способов криптоанализа
- Основа метода – наблюдение за преобразованиями разности $\Delta x = x \oplus x'$ входных блоков x и x'



Дифференциальный криптоанализ

Стойкость к дифференциальному методу определяется максимумом

$$DP_f(\Delta x, \Delta y) = \Pr(f(x) \oplus f(x \oplus \Delta x) = \Delta y)$$

– вероятности получить на выходе $f(x)$ разность Δy при условии, что на входе была разность Δx

Для зависящих от ключа преобразований $F_K(x)$ рассматривается усредненная вероятность

$$EDP_F(\Delta x, \Delta y) = 2^{-\kappa} \sum_{K \in V^\kappa} \Pr(F_K(x) \oplus F_K(x \oplus \Delta x) = \Delta y).$$

Дифференциальный криптоанализ

Стойкость к дифференциальному методу определяется максимумом

$$DP_f(\Delta x, \Delta y) = \Pr(f(x) \oplus f(x \oplus \Delta x) = \Delta y)$$

– вероятности получить на выходе $f(x)$ разность Δy при условии, что на входе была разность Δx

Для *зависящих от ключа* преобразований $F_K(x)$ рассматривается **усредненная** вероятность

$$EDP_F(\Delta x, \Delta y) = 2^{-\kappa} \sum_{K \in V^\kappa} \Pr(F_K(x) \oplus F_K(x \oplus \Delta x) = \Delta y).$$

Дифференциальный криптоанализ

Disclaimer

Здесь и далее используется **предположение**: раундовые ключи выбираются случайно и равновероятно (**Марковская модель**)

[Lai X., Massey J.L., Murphy S.
Markov ciphers and differential cryptanalysis – 1991]

Дифференциальный криптоанализ

$E_K(x)$ – n -битное преобразование

Чем **ближе** максимум

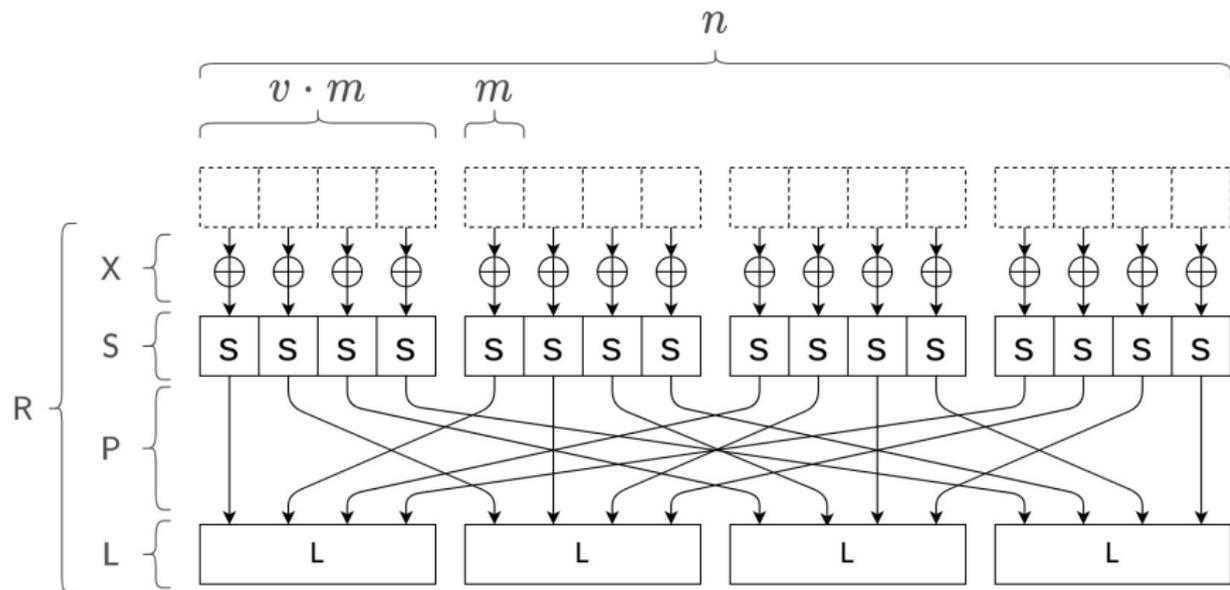
$$\text{MEDP} = \max_{\Delta x, \Delta y \neq 0} \text{EDP}_{E_K}(\Delta x, \Delta y) > 2^{-n}$$

к

$$2^{-n},$$

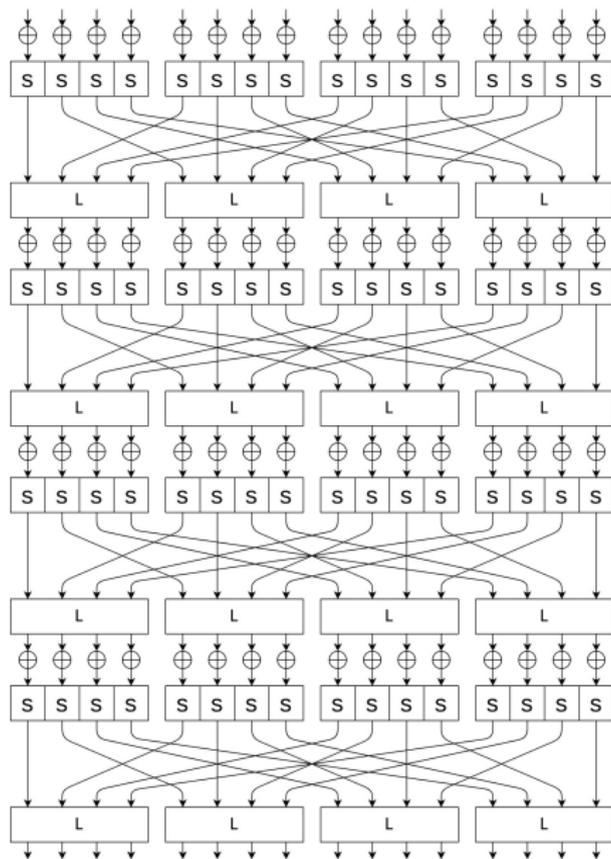
тем **более стойким** является E_K к дифференциальному методу

XSP-преобразование: раунд



	m	v	n
AES	8	4	128
PHOTON P_{100}	4	5	100

XSP-преобразование: 4 раунда



Дифференциалы и дифф. пути

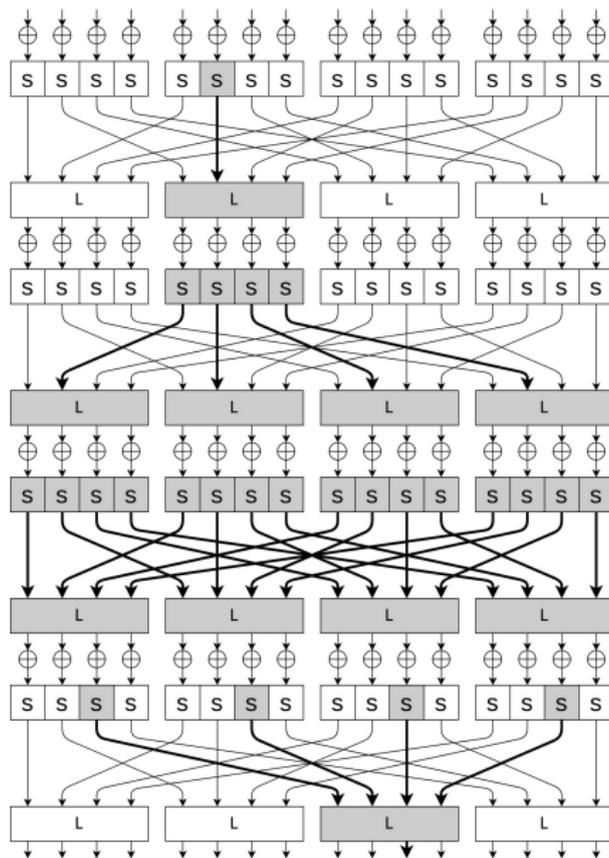
Дифференциальный **путь** = последовательность разностей

$$\Omega = \Delta x \rightarrow \Delta_1 \rightarrow \Delta_2 \rightarrow \dots \rightarrow \Delta y$$

Дифференциал = совокупность путей

$$(\Delta x, \Delta y) = \{\Omega_i : \Delta x \rightarrow \Delta_1^{(i)} \rightarrow \Delta_2^{(i)} \rightarrow \dots \rightarrow \Delta y\}$$

Дифференциальный путь



Дифференциальный путь

Максимальная вероятность перехода $\Delta x \xrightarrow{s} \Delta y$ через Sbox

$$p = \max_{\Delta x, \Delta y \in V^m \setminus 0} DP_s(\Delta x, \Delta y) = \Pr(s(x) \oplus s(x \oplus \Delta x) = \Delta y)$$

Минимальное число активных Sbox'ов для 4-х раундов

$$\theta \geq (v + 1)^2$$

Оценка на дифф. путь $\Omega = \Delta x \rightarrow \Delta_1 \rightarrow \Delta_2 \rightarrow \dots \rightarrow \Delta y$

$$EDCP(\Omega) \leq p^\theta$$

	p	v	θ	$EDCP(\Omega)$
AES	4/256	4	25	2^{-150}
PHOTON P_{100}	4/16	5	36	2^{-72}

\Rightarrow оценки много меньше 2^{-n} при большом числе раундов

Дифференциальный путь

Максимальная вероятность перехода $\Delta x \xrightarrow{s} \Delta y$ через Sbox

$$p = \max_{\Delta x, \Delta y \in V^m \setminus 0} DP_s(\Delta x, \Delta y) = \Pr(s(x) \oplus s(x \oplus \Delta x) = \Delta y)$$

Минимальное число активных Sbox'ов для 4-х раундов

$$\theta \geq (v + 1)^2$$

Оценка на дифф. путь $\Omega = \Delta x \rightarrow \Delta_1 \rightarrow \Delta_2 \rightarrow \dots \rightarrow \Delta y$

$$EDCP(\Omega) \leq p^\theta$$

	p	v	θ	$EDCP(\Omega)$
AES	4/256	4	25	2^{-150}
PHOTON P_{100}	4/16	5	36	2^{-72}

\Rightarrow оценки много меньше 2^{-n} при большом числе раундов

Дифференциальный путь

Максимальная вероятность перехода $\Delta x \xrightarrow{s} \Delta y$ через Sbox

$$p = \max_{\Delta x, \Delta y \in V^m \setminus 0} DP_s(\Delta x, \Delta y) = \Pr(s(x) \oplus s(x \oplus \Delta x) = \Delta y)$$

Минимальное число активных Sbox'ов для 4-х раундов

$$\theta \geq (v + 1)^2$$

Оценка на дифф. путь $\Omega = \Delta x \rightarrow \Delta_1 \rightarrow \Delta_2 \rightarrow \dots \rightarrow \Delta y$

$$EDCP(\Omega) \leq p^\theta$$

	p	v	θ	$EDCP(\Omega)$
AES	4/256	4	25	2^{-150}
PHOTON P_{100}	4/16	5	36	2^{-72}

⇒ оценки много меньше 2^{-n} при большом числе раундов

Дифференциальный путь

Максимальная вероятность перехода $\Delta x \xrightarrow{s} \Delta y$ через Sbox

$$p = \max_{\Delta x, \Delta y \in V^m \setminus 0} DP_s(\Delta x, \Delta y) = \Pr(s(x) \oplus s(x \oplus \Delta x) = \Delta y)$$

Минимальное число активных Sbox'ов для 4-х раундов

$$\theta \geq (v + 1)^2$$

Оценка на дифф. путь $\Omega = \Delta x \rightarrow \Delta_1 \rightarrow \Delta_2 \rightarrow \dots \rightarrow \Delta y$

$$EDCP(\Omega) \leq p^\theta$$

	p	v	θ	$EDCP(\Omega)$
AES	4/256	4	25	2^{-150}
PHOTON P_{100}	4/16	5	36	2^{-72}

\Rightarrow оценки много меньше 2^{-n} при большом числе раундов

Дифференциал

Дифференциал ($\Delta x, \Delta y$) – совокупность путей
Получить оценку гораздо сложнее!

AES

$$\text{MEDP}_{\text{AES}} \leq 2^{-113\dots} \Rightarrow \text{больше чем } 2^{-128}$$

[Keliher L., Sui J.

Exact Maximum Expected Differential and Linear Probability for 2-Round Advanced Encryption Standard (AES) – 2007]

PHOTON P_{100}

$$\text{MEDP}_{\text{PHOTON}} \leq 2^{-50} \Rightarrow \text{больше чем } 2^{-100}$$

[Jian G., Peyrin T., Poschmann A.

The PHOTON Family of Lightweight Hash Functions – CRYPTO 2011]

... и эти оценки НЕ уменьшаются при увеличении числа раундов

Дифференциал

Дифференциал ($\Delta x, \Delta y$) – совокупность путей
Получить оценку гораздо сложнее!

AES

$$\text{MEDP}_{\text{AES}} \leq 2^{-113\dots} \Rightarrow \text{больше чем } 2^{-128}$$

[Keliher L., Sui J.

Exact Maximum Expected Differential and Linear Probability for 2-Round Advanced Encryption Standard (AES) – 2007]

PHOTON P_{100}

$$\text{MEDP}_{\text{PHOTON}} \leq 2^{-50} \Rightarrow \text{больше чем } 2^{-100}$$

[Jian G., Peyrin T., Poschmann A.

The PHOTON Family of Lightweight Hash Functions – CRYPTO 2011]

... и эти оценки НЕ уменьшаются при увеличении числа раундов

Дифференциал

Дифференциал ($\Delta x, \Delta y$) – совокупность путей
Получить оценку гораздо сложнее!

AES

$$\text{MEDP}_{\text{AES}} \leq 2^{-113\dots} \Rightarrow \text{больше чем } 2^{-128}$$

[Keliher L., Sui J.

Exact Maximum Expected Differential and Linear Probability for 2-Round Advanced Encryption Standard (AES) – 2007]

PHOTON P_{100}

$$\text{MEDP}_{\text{PHOTON}} \leq 2^{-50} \Rightarrow \text{больше чем } 2^{-100}$$

[Jian G., Peyrin T., Poschmann A.

The PHOTON Family of Lightweight Hash Functions – CRYPTO 2011]

... и эти оценки НЕ уменьшаются при увеличении числа раундов

Дифференциал

Дифференциал ($\Delta x, \Delta y$) – совокупность путей
Получить оценку гораздо сложнее!

AES

$$\text{MEDP}_{\text{AES}} \leq 2^{-113\dots} \Rightarrow \text{больше чем } 2^{-128}$$

[Keliher L., Sui J.

Exact Maximum Expected Differential and Linear Probability for 2-Round Advanced Encryption Standard (AES) – 2007]

PHOTON P_{100}

$$\text{MEDP}_{\text{PHOTON}} \leq 2^{-50} \Rightarrow \text{больше чем } 2^{-100}$$

[Jian G., Peyrin T., Poschmann A.

The PHOTON Family of Lightweight Hash Functions – CRYPTO 2011]

... и эти оценки НЕ уменьшаются при увеличении числа раундов

Задача

Оценить стойкость четырех раундов преобразования $R^4(x) = (LPSX)^4(x)$ – получить верхнюю оценку на

$$MEDP_{R^4} = \max_{\Delta x, \Delta y \neq 0} EDP_{R^4}(\Delta x, \Delta y)$$

Низкоресурсные XSPL обладают меньшими размерами блока/подблока/подстановки \Rightarrow будем использовать вычислительные методы, недоступные для «тяжелых» преобразований

Переход к эквивалентной задаче

Воспользуемся:

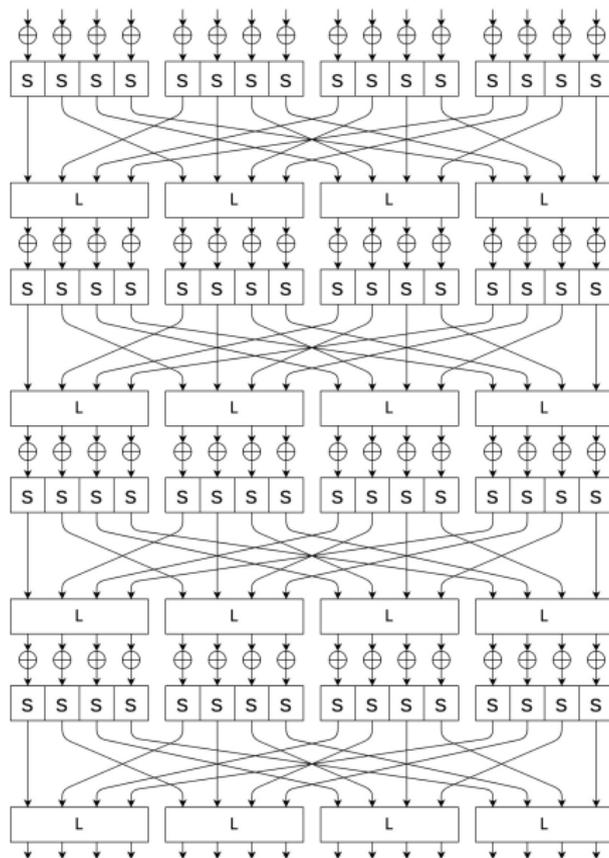
- свойством $PSX(x) = SXP(x)$
- линейностью P и L

Перейдём к преобразованию «эквивалентному относительно дифференциального метода»

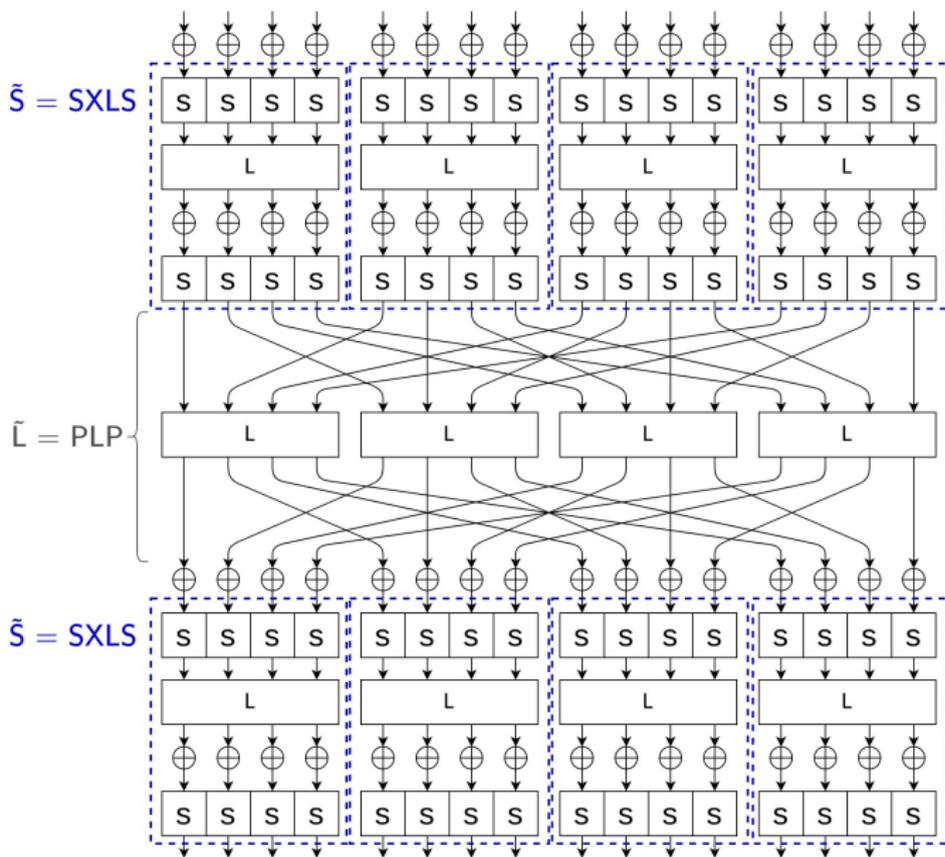
$$\tilde{E}(x) = SXLSP LP SXLSP(x)$$

$$\max_{\Delta x, \Delta y \neq 0} EDP_{\tilde{E}}(\Delta x, \Delta y) = \max_{\Delta x, \Delta y \neq 0} EDP_{R^4}(\Delta x, \Delta y)$$

Исходное преобразование $R^4(x) = (LPSX)^4(x)$



Преобразование $\tilde{E}(x)$



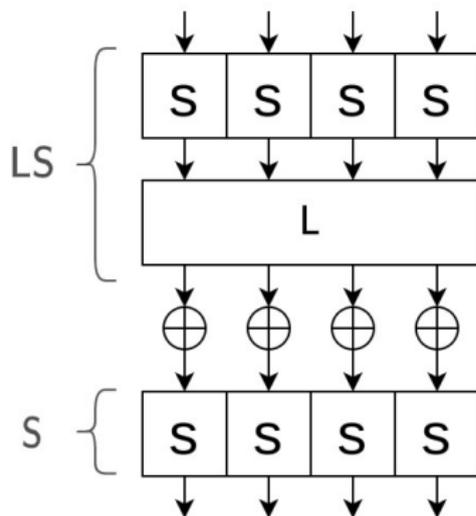
Преобразование $\tilde{E}(x)$

$\tilde{E}(x)$ – двухраундовое XSRL-преобразование

- 1 Нелинейный слой – $\tilde{S} = \text{SXLS}$
– v SuperSbox'ов по vm бит
- 2 Линейный слой – $\tilde{L} = \text{PLP}$
– максимально рассеивающее над $(V^{vm})^v$, $B_{\tilde{L}} = v + 1$

Оценка одного SuperSbox'a

Построим все дифференциалы для одного SuperSbox'a

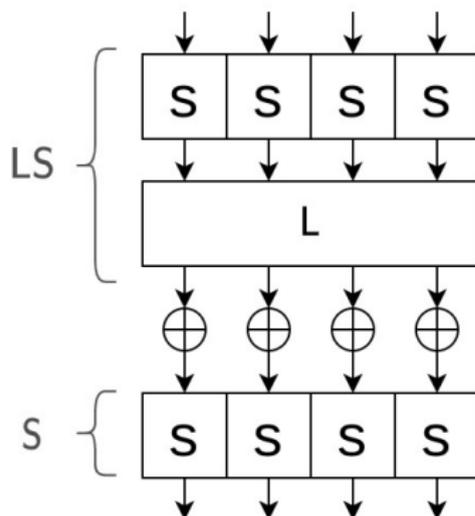


— построим матрицу

$$[\text{EDP}_{\text{SXLs}}(\Delta x, \Delta y)]$$

размерности $2^{vm} \times 2^{vm}$

Оценка одного SuperSbox'a – базовый подход



Перебираем блок x , разность Δx , ключ k

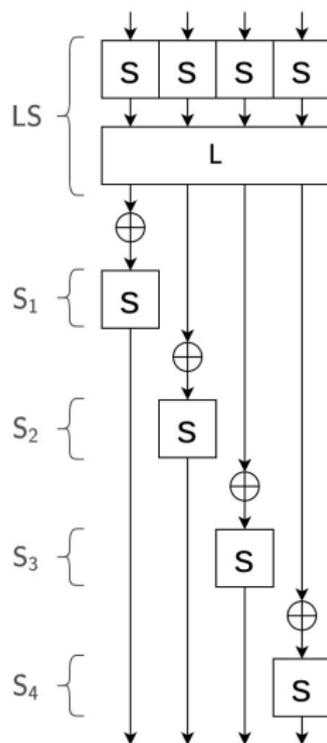
Сложность: $2^{vm} \cdot 2^{vm} \cdot 2^{vm} = 2^{3vm}$ операций

Для AES: $(2^{32})^3 = 2^{96}$ операций

Для PHOTON P_{100} : $(2^{20})^3 = 2^{60}$ операций

Оценка одного SuperSbox'a – эффективный подход

$S = S_v \dots S_2 S_1$ – v последовательных преобразований



Оценка одного SuperSbox'a – эффективный подход

$S = S_v \dots S_2 S_1$ – v последовательных преобразований

Матрицы $[DP_{S_i}(\Delta x, \Delta y)]$ будут иметь разреженный вид

$$\begin{aligned} [EDP_{S \times L S}(\Delta x, \Delta y)] &= [DP_{L S}(\Delta x, \Delta y)] \times \\ &\times [DP_{S_1}(\Delta x, \Delta y)] \times \\ &\times [DP_{S_2}(\Delta x, \Delta y)] \times \\ &\dots \\ &\times [DP_{S_v}(\Delta x, \Delta y)] \end{aligned}$$

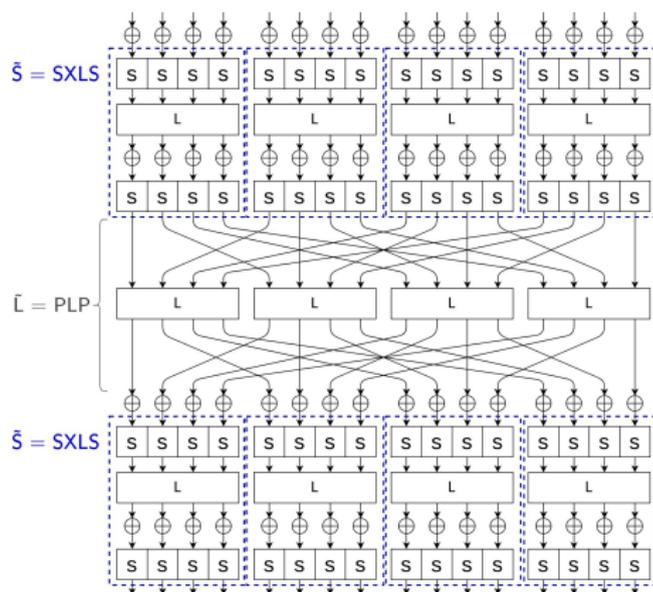
Сложность: $2^{2vm} \cdot 2^m \cdot v$ операций

Для PHOTON P_{100} : $(2^{20})^2 \cdot 2^4 \cdot 5 \approx 2^{46}$ операций

Оценка четырёх раундов XSPL

- знаем все дифференциалы $\tilde{S} = SXLS$
- знаем рассеивающие свойства \tilde{L}

⇒ оценим дифференциалы в 4-раундовом преобразовании



Рассмотрим два подхода...

Оценка стойкости – подход 1

Воспользуемся теоремой для оценки двухраундового XSL:

Теорема (FSE2003)

Для преобразования вида $y = E(x) = SXLSX(x)$ выполнено

$$\begin{aligned} \text{MEDP}_E &= \max_{\Delta x, \Delta y \neq 0} \text{EDP}_E(\Delta x, \Delta y) \leq \\ &\leq \max \left(\max_{\alpha \in V^m \setminus 0} \sum_{i \in V^m \setminus 0} (\text{DP}_s(\alpha, i))^{\mathcal{B}_L}, \max_{\beta \in V^m \setminus 0} \sum_{i \in V^m \setminus 0} (\text{DP}_s(i, \beta))^{\mathcal{B}_L} \right) \end{aligned}$$

где S состоит из параллельного применения подстановок $s : V^m \rightarrow V^m$,
а \mathcal{B}_L – минимальное число активных подстановок s



Park, S., Sung, S.H., Lee, S., Lim, J.

Improving the Upper Bound on the Maximum Differential and the Maximum Linear Hull Probability for SPN Structures and AES

In: Fast Software Encryption - FSE 2003. LNCS, vol. 2887, pp. 247–260.
Springer (2003).

Оценка стойкости – подход 1

Лемма

Для четырёх раундов XPSL-преобразования справедлива оценка

$$\begin{aligned} \text{MEDP}_{R^4} &= \max_{\Delta x, \Delta y \neq 0} \text{EDP}_{R^4}(\Delta x, \Delta y) \leq \\ &\leq \max \left(\max_{\alpha \in V^{vm} \setminus 0} \sum_{i \in V^{vm} \setminus 0} (\text{EDP}_{\text{SXLS}}(\alpha, i))^{\beta_{\text{PLP}}}, \right. \\ &\quad \left. \max_{\beta \in V^{vm} \setminus 0} \sum_{i \in V^{vm} \setminus 0} (\text{EDP}_{\text{SXLS}}(i, \beta))^{\beta_{\text{PLP}}} \right). \end{aligned}$$

Оценка стойкости – подход 1

Идея доказательства леммы:

- применить теорему (FSE2003) к преобразованию $\tilde{E}(x) = \tilde{S}X\tilde{L}\tilde{S}X(x)$
- вместо бесключевой $s : V^m \rightarrow V^m$ рассмотреть зависящую от ключа $SXLS : V^{vm} \times V^{vm} \rightarrow V^{vm}$
- вместо вероятности $DP(\Delta x, \Delta y)$ рассмотреть усреднённую вероятность $EDP(\Delta x, \Delta y)$

Оценка стойкости – подход 1

Идея доказательства леммы:

- применить теорему (FSE2003) к преобразованию $\tilde{E}(x) = \tilde{S}X\tilde{L}\tilde{S}X(x)$
- вместо бесключевой $s : V^m \rightarrow V^m$ рассмотреть зависящую от ключа $SXLS : V^{vm} \times V^{vm} \rightarrow V^{vm}$
- вместо вероятности $DP(\Delta x, \Delta y)$ рассмотреть усреднённую вероятность $EDP(\Delta x, \Delta y)$

Оценка стойкости – подход 1

Идея доказательства леммы:

- применить теорему (FSE2003) к преобразованию $\tilde{E}(x) = \tilde{S}X\tilde{L}\tilde{S}X(x)$
- вместо бесключевой $s : V^m \rightarrow V^m$ рассмотреть зависящую от ключа $SXLS : V^{vm} \times V^{vm} \rightarrow V^{vm}$
- вместо вероятности $DP(\Delta x, \Delta y)$ рассмотреть усреднённую вероятность $EDP(\Delta x, \Delta y)$

Оценка стойкости – подход 2

Второй подход – больше вычислительных ресурсов, но более точная оценка:

Шаг 1. Получим оценку \hat{r}_1 на дифференциалы, у которых активен ровно $v + 1$ SuperSbox

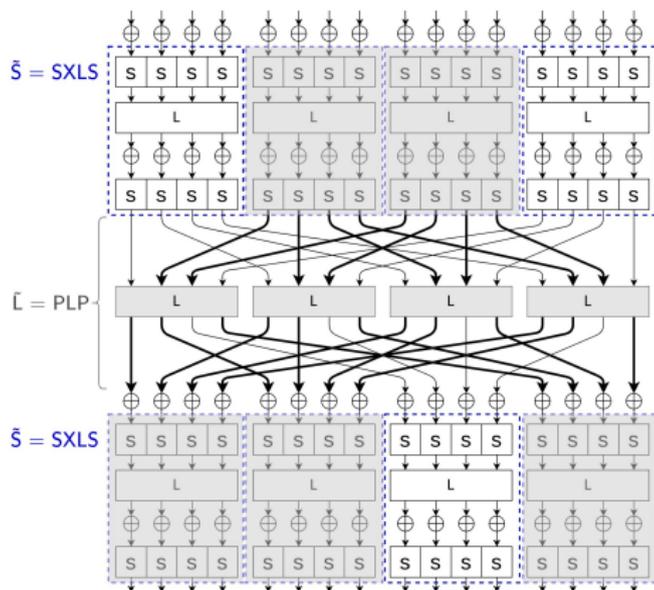
Шаг 2. Получим оценку \hat{r}_2 на остальные дифференциалы ($v + 2, v + 3, \dots, 2v$ активных)

Шаг 3:

$$\text{MEDP} \leq \max(\hat{r}_1, \hat{r}_2)$$

Оценка стойкости – подход 2

Шаг 1. Получим оценку $\hat{\rho}_1$ на дифференциалы, у которых активен ровно $v + 1$ SuperSbox



Изображена конфигурация $c_{active} = \{2, 3, 5, 6, 8\}$, $|c_{active}| = 5 = v + 1$

Оценка стойкости – подход 2

Шаг 1. Получим оценку $\hat{\rho}_1$ на дифференциалы, у которых активен ровно $v + 1$ SuperSbox

- Рассмотрим каждую конфигурацию c_{active} : $\binom{2v}{v+1}$ вариантов
- Построим набор кодовых слов кода $\tilde{L} = \text{PLP}$, соответствующих c_{active} : $(2^m - 1)^v$ кодовых слов
- Каждый набор оценим рекурсивным алгоритмом:
[Kiryukhin V. – Exact maximum expected differential and linear probability for 2-round Kuznyechik – CTRCrypt'18]
- Максимум по всем наборам – оценка $\hat{\rho}_1$

Оценка стойкости – подход 2

Шаг 2. Получим оценку $\hat{\rho}_2$ на остальные дифференциалы
($v + 2, v + 3, \dots, 2v$ активных)

- Находим строку/столбец матрицы $[\text{EDP}_{\text{SXLs}}(\Delta x, \Delta y)]$ дифференциалов SuperSbox'a, которые дадут максимальную оценку $\hat{\rho}_2$
- Знаем показатель рассеивания $\tilde{L} = \text{PLP}$ над $(V^{vm})^v$, $\mathcal{B}_{\tilde{L}} = v + 1$
- Вычисляем $\hat{\rho}_2$ алгоритмом динамического программирования:
[Kiryukhin V. – An algorithm for bounding non-minimum weight differentials in 2-round LSX-ciphers – CTRcrypt'20]

Шаг 3:

$$\text{MEDP} \leq \max(\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2)$$

Преобразование P_{100} хэш-функции PHOTON

[Jian G., Peyrin T., Poschmann A.
The PHOTON Family of Lightweight Hash Functions
CRYPTO 2011]

Размер блока $n = 100$ бит

Размерность состояния $v \times v = 5 \times 5$

Размер подстановки $m = 4$ бита

Оценка разработчиков: $\text{MEDP}_{P_{100}} \leq 2^{-50}$

Новая оценка

$$\text{MEDP}_{P_{100}} \leq 2^{-67.4\dots}$$

Результаты

Функция сжатия g хэш-функции «Мора»,
РусКрипто'2020

[Бондакова О.С.
Об одной низкоресурсной хэш-функции
РусКрипто'2020]

Размер блока $n = 64$ бита

Размерность состояния $v \times v = 4 \times 4$

Размер подстановки $m = 4$ бита

Аналитическая оценка: $\text{MEDP}_g \leq 2^{-35.6\dots}$

Новая оценка

$$\text{MEDP}_g \leq 2^{-47.3\dots}$$

Заключение

- Представлены вычислительные подходы к оценке стойкости 4-х раундов XSPL-преобразований
- В рамках предположения о независимости и равновероятности раундовых ключей:
 - ▶ Получены верхние оценки на вероятность дифференциала
 - ▶ Рассматриваемые оценки по меньшей мере не возрастают с увеличением числа раундов
 - ▶ Значение оценки определяет меру доказуемой стойкости к дифференциальному методу
- Получены новые оценки для:
 - ▶ Преобразования P_{100} хэш-функции PHOTON, CRYPTO 2011
 - ▶ Функции сжатия g хэш-функции «Мора», РусКрипто'2020

Заключение

- Представлены вычислительные подходы к оценке стойкости 4-х раундов XSPL-преобразований
- В рамках предположения о независимости и равновероятности раундовых ключей:
 - ▶ Получены **верхние оценки** на вероятность дифференциала
 - ▶ Рассматриваемые оценки по меньшей мере **не возрастают** с увеличением числа раундов
 - ▶ Значение оценки определяет меру **доказуемой стойкости** к дифференциальному методу
- Получены новые оценки для:
 - ▶ Преобразования P_{100} хэш-функции PHOTON, CRYPTO 2011
 - ▶ Функции сжатия g хэш-функции «Мора», РусКрипто'2020

Заключение

- Представлены вычислительные подходы к оценке стойкости 4-х раундов XSPL-преобразований
- В рамках предположения о независимости и равновероятности раундовых ключей:
 - ▶ Получены **верхние оценки** на вероятность дифференциала
 - ▶ Рассматриваемые оценки по меньшей мере **не возрастают** с увеличением числа раундов
 - ▶ Значение оценки определяет меру **доказуемой стойкости** к дифференциальному методу
- Получены новые оценки для:
 - ▶ Преобразования P_{100} хэш-функции PHOTON, CRYPTO 2011
 - ▶ Функции сжатия g хэш-функции «Мора», РусКрипто'2020

Благодарю за внимание!